Hablamos de los postulados:

1) Estados son kets normalizados en $\mathcal{H}$
2) Los observables son operadores $\hat{A}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$
3) Los resultados posibles de medir $\hat{A}$ son sus e-valores
4) Para $\hat{A}|e_i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle$, la probabilidad de obtener λ_i cuando el sistema está en el edo. $|\psi\rangle$ es:
   - $\mathcal{P}(\lambda_i) = |\langle e_i|\psi\rangle|^2$ (espectro discreto y no degenerado)
   - $\mathcal{P}(\lambda_i) = \langle\psi|P_{\lambda_i}|\psi\rangle$ (en general)

   Proyector hacia e-espacio de λ_i.

5) Colapso de la función de onda
   - Espectro discreto, no degenerado:

$$|\psi\rangle = \sum C_j|e_j\rangle \xrightarrow[\lambda_i \text{ como resutado}]{\text{medir y obtener}} |\psi'\rangle = |e_i\rangle$$

   - En general:

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\lambda_i \text{ como resutado}]{\text{medir y obtener}} |\psi'\rangle = \frac{P_{\lambda_i}|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_{\lambda_i}|\psi\rangle}}$$

6) Evolución temporal

operador hamiltoniano

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

Para problemas con análogo clásico, $\hat{H}$ se obtiene del hamiltoniano clásico reemplazando las cantidades físicas por sus operadores correspondientes.

Para una partícula en un potencial

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m} + V(\vec{R})$$

¿Cómo son los operadores $\hat{\vec{P}}$ y $\hat{\vec{R}}$?

Los operadores $\vec{R}$ (posición) y $\vec{P}$ (momento)

$\vec{R} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ observable

Empecemos con una coordenada.

$\hat{X} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$

Como $\hat{X}$ es un observable, podemos construir una base de e-vectores:

ecuación de eigenvalores

$$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$$

(etiquetamos al e-vector usando el e-valor correspondiente)

eigenvector

operador de posición

los e-valores son posiciones

Hay tantos valores de x como puntos en $\mathbb{R}$ así que la dimensión de $\mathcal{H}$ es infinita.

$\hat{X}$ es un ejemplo de un operador con espectro continuo.

El espectro de X es $\mathbb{R}$.

- Cumple las propiedades de bases continuas de las que habíamos hablado

$$\int dx\, |x\rangle\langle x| = \mathbb{1} \qquad \langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$$

- La **función de onda** son los coeficientes necesarios para escribir un estado $|\psi\rangle$ en la base $\{|x\rangle\}$.

$$|\psi\rangle = \int dx\, \psi(x)\, |x\rangle \quad ; \quad \underline{\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle}$$

función de onda

$$-\ \langle\psi|\psi\rangle = \int dx\, \overbrace{\langle\psi|x\rangle}^{\psi^*(x)}\overbrace{\langle x|\psi\rangle}^{\psi(x)} = \int \psi^*(x)\,\psi(x)\,dx = \int |\psi(x)|^2 dx$$

$\mathbb{1}$

Como queremos norma de $|\psi\rangle \to \langle\psi|\psi\rangle < \infty \Rightarrow \psi \in \mathcal{L}^2$ para que esté bien definido.

$$-\ \langle\phi|\psi\rangle = \int dx \langle\phi|x\rangle\langle x|\psi\rangle = \int \phi^*(x)\psi(x)\,dx$$

$\mathbb{1}$

— Esto fue X, ¿Qué es $\vec{R} = (X, Y, Z)$?

$\vec{R}|\vec{r}\rangle = \vec{r}\,|\vec{r}\rangle$ es una manera corta de escribir

Notación abusada

$\vec{r} = (x, y, z)$

$$X|(x,y,z)\rangle = x|(x,y,z)\rangle$$
$$Y|(x,y,z)\rangle = y\,|(x,y,z)\rangle$$
$$Z|(x,y,z)\rangle = z|(x,y,z)\rangle$$

$$X|\vec{r}\rangle = x|\vec{r}\rangle$$

$\{|\vec{r}\rangle\}$ es una base de e-vectores comunes para X, Y, Z.

- En 3D, la función de onda es $\psi(\vec{r}) = \langle\vec{r}|\psi\rangle$

También hay relación de ortonormalidad $\langle\vec{r}|\vec{r}\,'\rangle = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

y de completez $\int d^3r\, |\vec{r}\rangle\langle\vec{r}| = \mathbb{1}$

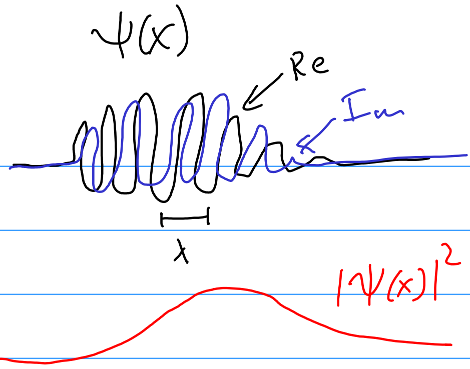
¿Qué significa $\psi(\vec{r})$?

Por postulado 4: La densidad de prob de encontrar a la partícula en un volumen d^3r en $\vec{r}$ es $|\psi(\vec{r})|^2$

Como $\int |\psi(\vec{r})|^2 d^3x = 1$

$[d^3x] = L^3$; $[|\psi(\vec{r})|^2] = \frac{1}{L^3}$ densidad de probabilidad

Ejemplos de función de onda



El operador de momento $\hat{P}$

- $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$
- Base de eigenvectores
  - $\langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}')$
  - $\int d^3p \, |\vec{p}\rangle\langle\vec{p}| = \mathbb{1}$

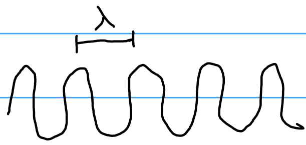
1D: $P_x |p_x\rangle = p_x |p_x\rangle$

3D: $P_x |\vec{p}\rangle = p_x |\vec{p}\rangle$, $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$

¿Cómo se relacionan $\{|x\rangle\}$ y $\{|\vec{p}\rangle\}$ o $\hat{X}$ y $\hat{P}$?

La observación de deBroglie

$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \vec{p} = \hbar \vec{k}$ para onda plana



En general, podemos usar la transformada de Fourier para encontrar una relación entre la distribución de posiciones y la distribución de números de onda.

$$\psi_k(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \psi_r(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, d^3r$$

$$\vec{r} \xleftrightarrow{\text{Fourier}} \vec{k} \xleftrightarrow{\text{de Broglie}} \vec{p}$$

Hay que tener cuidado al cambiar la variable de una función de densidad de probabilidad. No es correcto solamente hacer la sustitución $\vec{k} \to \vec{P}/\hbar$